Тернопільськийнаціональнийпедагогічнийуніверситет

іменіВолодимира Гнатюка

фізико-математичний факультет

кафедра математики та методики її викладання

Магістерська робота
з математичного аналізу

на тему: «Продовження функцій, заданих на підмножині прямої разом з похідними»

Магістрантки, групи мМ

спеціальності 8.04020101. Математика

Бучок Олени Сергіївни

Керівник: Галан В.Д., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та методики її викладання ТНПУ ім. Володимира Гнатюка

Рецензент: Романюк Л.А., кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики ТНТУ ім. Івана Пюлюя

Національна шкала ____________________

Кількість балів: ______Оцінка: ECTS ____

Тернопіль - 2013 року

Зміст

Вступ

В роботі вивчається питання продовження функцій з довільної підмножини Eчислової прямої Rна всю пряму, а також питання опису слідів на E класу W^rі більш загальних класів.

Нехай $E \subset R$. Звуженням функції $f: R \to R$називається функція $f_E: E \to R$, значення якої співпадає зі значеннями на E функції f, тобто $f_E(x) = f(x)$при $x \in E$.

Означення 1. Нехай $H(R)$– деякий простір функцій $f: R \to R$, $\breve{H}(E)$– простір функцій $f: E \to R$. Кажуть, що простір $\breve{H}(E)$ являється слідом на E простору $H(R)$ і записують:

$$\breve{H}(E) = H(R)\big|_{E}$$

якщо:

а) звуження f_E кожної функції $f \in H(R)$належить $\breve{H}(E)$, тобто $f_E(x) \subset \breve{H}(E)$;

б) для кожної функції $f \in \breve{H}(E)$ існує функція $\bar{f} \in H(R)$, така, що $f = \bar{f}_E$.

Актуальність. Питання, що описується в роботі розглядалось ще в 1934 році H. Whitney [6, с. 369-387], який описав слід класу $C^r(R), r \in N$на довільній замкнутій підмножині $E \subset R$. ($C^r(R)$ – клас r раз неперервно диференційованих на R функцій). При цьому класом $\check{C}^r(E)$ виявився клас заданих на E функцій, розділені різниці $(r+1)$-го порядку яких сходяться на E. В цьому випадку розглядались тільки значення функцій f на E і відповідно, розглядались тільки «прості» розділені різниці, тобто вузли $x_0, x_1, \dots, x_r$, яких були простими.

В 1957 році P. I. Merrien[13, с.291-309] розглянув випадок, коли на E відомі не тільки значення функції, але і її похідних і також описав слід класу $C^r(E)$ але уже, зрозуміло, з допомогою розділених різниць з кратними вузлами.

Надалі в роботах В.К. Дзядика, Ю.Н. Субботіна, A. Jonsson, DeBoor, Ю.А. Брудного, П.А. Шварцмана, І.А. Шевчука (див. [5,10,11,12,14]) були описані сліди класів $W^r(R)$, ($f \in W^r(R)$,якщо похідна $f^{(r-1)}$локально абсолютно неперервна і $\left|f^{(r)}(x)\right| \leq C, C - const$), а також класів $W^r H_k^{\varphi}(R)$ (означення див.нижче). У цих роботах опис дано з допомогою розділених різниць з простими вузлами, тобто враховувались тільки значення функції f на E.

В магістерській роботі розглядається випадок, коли на множині E відомі не тільки значення функції, але і її похідних, тому опис слідів дається за допомогою розділених різниць не з простим, а подібно до роботи P. I. Merrien з кратними вузлами.

§ 1. Деякі властивості розділених різниць.

Нехай $\tau_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \coloneqq (x_i)_{i=0}^{n}$ – довільний набір точок числової осі, причому деякі з точок можуть повторюватись. Запис цього ж набору у вигляді

$$\tau_n = \left(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}\right) \coloneqq$$
$$\coloneqq (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j})_{j=0}^{l}$$

означає, що:

1. $\forall\, j \in \{0, 1, \dots, l\},\ x_{j1} = x_{j2} = \dots = x_{jp_j} \coloneqq \check{x}_j;$
2. $\check{x}_j \neq \check{x}_i$, якщо $j \neq i$;
3. $\sum_{j=0}^{l} p_j = n + 1$.

Через $[\tau_n;\ f]$будемо позначати розділену різницю $(n+1)$-го порядку функції f, складену по набору τ_n. Якщо набір τ_n складено з різних чисел, то через $[\tau_n; f]$будемо позначати розділену різницю в звичайному розумінні (див., напр., [7, с.16]), тобто

$$[\tau_n; f] \equiv [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0\ (j\neq i)}^{n}(x_i - x_j)} \quad (0.1)$$

а якщо $\tau_n = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j})_{j=0}^{l}$ і хоча б одне з натуральних чисел $p_j > 1$, то розділена різниця $[\tau_n; f]$розглядається в узагальненому вигляді і визначається за формулою Ерміта:

$$[\tau_n; f] = \left[x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}; f\right] \coloneqq$$
$$\coloneqq \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{p_j-1} \frac{f^{(p_j-k-1)}(\check{x}_j)}{(p_j-k-1)}\, g_j^{(k)}(\check{x}_j), \quad (0.2)$$

в якій

$$g_j(x) = \prod_{i=0 (i\neq j)}^{l} (x - \check{x}_i)^{-p_i} \quad (0.3)$$

Модулем неперервності k-го порядку (або k-м модулем неперервності) неперервної на I функції f називається функція $\omega_k(f) = \omega_k(f; t)$, що визначається при будь-якому $t \geq 0$рівністю:

$$\omega_k(f) = \omega_k(f; I, t) \coloneqq \sup_{0\leq h\leq t} \sup_{x, x+kh\in I} \left|\Delta_h^k(f; x)\right|, \quad (0.4)$$

де$\Delta_h^k(f; x) \coloneqq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x + ih)$– (0.5)

скінченна різниця k-го порядку функції f в точці x з кроком h, а I – одна з множин: $[a; b]$, або $[a;\ \infty)$, або$(-\infty; b]$, або$(-\infty;\ \infty)$.

Функцією типу k-го модуля неперервності називається функція $\varphi = \varphi(t)$, яка визначена і неперервна при $t \geq 0$ і має наступні властивості:

1. $\varphi(0) = 0;$
2. $\varphi(t)$не спадає на $[0;\ \infty)$;
3. Функція $\frac{\varphi(t)}{t^k}$– не зростає на $(0;\ \infty)$.

Відомо, що яка б не була неперервна на $[a;b]$ функція f і яке б не було натуральне число k, функція

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0, \ \text{якщо}\ t = 0; \\ t^k \sup\limits_{u\geq t}[\omega_k(f;[a;b],u)u^{-k}], \text{якщо}\ t > 0 \end{cases}$$

є функцією типу k-го модуля неперервності і про будь-якому $t \geq 0$ виконується нерівність:

$$\omega_k(f;[a;b],t) \leq \ \varphi(t) \leq 2^k(f;[a;b],t)$$

Означення 2. Нехай $k\epsilon N$, $r\epsilon N_0 = \{0\} \cup N = \{0, 1, 2\ 3, \dots\}$, $M > 0$– фіксоване число і φ – функція типу -го модуля неперервності.

Класом $MW^rH(k,I,\varphi)$називається множина всіх визначених на I неперервних функцій f, кожна з яких r раз неперервно диференційовна на I $(f^0(x) := f(x))$для кожної з яких$\omega_k(f^r;t) \leq M\varphi(t), t \geq 0$.

Позначимо ще $W^rH(k,I,\varphi) := 1W^rH(k,I,\varphi)$;

$W^rH_k^\varphi(I) := \bigcup_{M>0} MW^rH(k,I,\varphi);$

$MH(k,I,\varphi) := MW^0H(k,I,\varphi)$;

$H(k,I,\varphi) := 1H(k,I,\varphi)$;

$H_k^\varphi(I) := \bigcup_{M>0} MH(k,I,\varphi)$.

Зафіксуємо$k \in N, r \in N_0, B_{k,r}$–множину впорядкованих пар (p,q), де $p\epsilon\{0,1,2,\dots,k-1\}$, $q\epsilon\{p+r+1, p+r+2, \dots, k+r\}$;набір$\tau_{k+r} = (x_0, x_1, \dots, x_{k+r})$; φ – функцію типу k-го модуля неперервності.

Означення 3. Для кожної пари $(p,q) \in B_{k,r}$ позначимо

$$\Lambda_{p,q,k,r}(x_0, x_1, \dots, x_r;\ \varphi) \equiv \Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi) := \frac{\int_{\frac{1}{2}(x_q-x_p)}^{d(p,q)} \frac{\varphi(u)}{u^{q-p-r+1}}du}{\prod_{i=0}^{p-1}(x_q-x_i)\prod_{i=q+1}^{k+r}(x_i-x_p)}, \tag{0.6}$$

$$\text{де } d(p,q) = \begin{cases} \min\{x_{q+1} - x_p,\ x_q - x_{p-1}\}, \text{якщо } p > 0, q < k + r; \\ x_{q+1} - x_0, \text{якщо } p = 0, q < k + r; \\ x_{k+r} - x_{p-1},\ \text{якщо } p > 0, q = k + r \\ x_{k+r} - x_0,\ \text{якщо } p = 0, q = k + r \end{cases} \tag{0.7}$$

Через $\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi)$ позначимо число, що задається формулою:

$$\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi) \coloneqq \max_{(p,q)\in B_{k,r}} \Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi) \tag{0.8}$$

(Тут і далі будемо вважати, що при $m > l\ \ \prod_{i=m}^{l} \coloneqq 1;\ \ \sum_{i=m}^{l} \coloneqq 0$).

Із цього означення видно, що величина $\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi)$ враховує як структуру набору τ_{k+r}, так і властивості функції φ.

Означення 4.

Дві величини Aта B, що залежать від деяких параметрів називаються слабо еквівалентні між собою, якщо існують додатні сталі $C_1, C_2 (0 < C_1 < C_2 < \infty)$, такі що при всіх допустимих значеннях параметрів виконується нерівність:

$$C_1 B < A < C_2 B$$

Випишемо значення величин $\Lambda_{k,r}$ для деяких важливих часткових випадків:

1. при $r = 0, k = 2$ та $\varphi = \varphi(t)$–довільної функції типу 2-го модуля неперервності величина $\Lambda_{2,0}(x_0, x_1, x_2;\ \varphi)$ слабо еквівалентна величині $\frac{1}{x_2 - x_0}\int_{min\{x_1 - x_0, x_2 - x_1\}}^{x_2 - x_0} \frac{\varphi(u)}{u^2} du$, яка була введена В. К. Дзядиком[8];

2. при $r = 0, k \geq 2$ та $\varphi(t) = t^{k+1}$ величина $\Lambda_{k,0}(x_0, x_1, \dots, x_r;\ \varphi)$ слабо еквівалентна величині $\frac{1}{x_k - x_0}\left(\left|\ln \frac{x_k - x_1}{x_{k-1} - x_0}\right| + 1\right)$ (див.[12]).

3. при $r \geq 0, \varphi = \varphi(t)$– функції типу 1-го модуля неперервності величина $\Lambda_{1,r}(x_0, x_1, \dots, x_{r+1};\ \varphi)$ слабо еквівалентна величині $\frac{\varphi(x_{r+1} - x_0)}{x_{r+1} - x_0}$;

4. при$r > 0, k \in N$ та $\varphi = \varphi(t) = t^k$величина $\Lambda_{k,r}(x_0, x_1, \dots, x_r;\ t^k)$ слабо еквівалентна 1.

Нехай $\mathfrak{M}_r = \{E^{(s)}\}_{s=0}^{r}$–деяка незростаюча система множин на числовій осі R:

$$E^{(r)} \subset E^{(r-1)} \subset \cdots \subset E^{(1)} \subset E^{0} \subset R$$

Елементи $E^{(s)}$ системи $\mathfrak{M}_r$ будемо вважати незалежними і на системі $\mathfrak{M}_r$ означимо комплект $[f]$наступним чином. При кожному$s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}$на множині $E^{(1)}$ визначена деяка функція$f_1(x) = f_1$.При$x\epsilon E^{(s)} \setminus E^{(s+1)}(s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}, E^{r+1} = \emptyset$ позначимо

$$[f(x)] \coloneqq (f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)) \quad (0.9)$$

і будемо називати $[f(x)]$ комплектом «функцій», визначених на системі $\mathfrak{M}_r$.

Будемо говорити, що набір τ_{k+r}належить класу $\gamma(\mathfrak{M}_r)$, якщо

$$\tau_{k+r} = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j})_{j=0}^{l}$$

і при цьому виконуються умови:

1. при всіх $j = 0,1,\dots,l$маємо$p_j \leq r+1$;
2. $\check{x}_j \epsilon E^{(0)}$при кожному $j = 0,1,\dots,l$;
3. якщо при деякому $s \in \{0,1,2,\dots,r\}$ точка $\check{x}_j$ належить$E^{(s)} \setminus E^{(s+1)}$, то $p_j \leq s+1$.

Нехай $\tau_{k+r} \in \gamma(\mathfrak{M}_r)$ і комплект $[f]$ означено як вище. Розділеною різницею комплекта $[f]$, складеного по набору будемо називати величину:

$$\left[\tau_{k+r}; [f]\right] = \left[x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}; [f]\right]$$

$$\coloneqq \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=0}^{p_{j-1}} \frac{f_{p_j-i-1}(\check{x}_j)}{i!\,(p_j - i - 1)} \left(\frac{d^{(i)}}{dx^{(i)}} \prod_{k=0,(k\neq j)}^{l} \frac{1}{(x - x_k)^{p_k}} \right)_{x=\check{x}_j} \quad (0.10)$$

Означення 5. Нехай зафіксовано: числа $k\epsilon N$ та $r\epsilon N_0, M > 0$ – стала, $\varphi = \varphi(t)$ – функція типу k-го модуля неперервності, система множин $\mathfrak{M}_r$.

Класом $MW^r\check{H}[k, \mathfrak{M}_r;\, \varphi]$називається множина всіх визначених на системі $\mathfrak{M}_r$ комплектів $[f]$, для кожного з яких при будь-якому наборі $\tau_{k+r}\epsilon\gamma(\mathfrak{M}_r)$ виконується нерівність:

$$\left|\left[\tau_{k+r}; [f]\right]\right| \leq M\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\, \varphi) \quad (0.11)$$

Як і раніше позначимо:

$W^r\breve{H}[k,\mathfrak{M}_r,\varphi] := 1W^r\breve{H}[k,\mathfrak{M}_r,\varphi]$;

$W^r\breve{H}_k^{\varphi}[(\mathfrak{M}_r] := \cup_{M>0} MW^r\breve{H}[k,\mathfrak{M}_r,\varphi]$.

Нехай $\breve{Y}$- клас комплектів $[g]$, визначених на системі множин $\mathfrak{M}_r$, а Y – клас функцій заданих на R. Будемо говорити, що комплект $[g]$ можна продовжити до деякої функції $\bar{g}\epsilon Y$, якщо при кожному значенні $s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}$ і будь-якому $x\epsilon E^{(s)}$, $\bar{g}^{(s)}(x) = g_s(x)$.

Означення 6. Будемо говорити, що клас $\breve{Y}(\mathfrak{M}_r)$ є слідом на системі множин $\mathfrak{M}_r$ класу $Y(R)$, якщо:

а) для кожної функції $\bar{g}\epsilon Y(R)$ комплект $[\bar{g}]$, визначений на системі множин формулою:

$[\bar{g}(x)] := (\bar{g}(x),\bar{g}^1(x),\dots,\bar{g}^{(s)}(x))$, де $s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}$, $x\epsilon E^{(s)}\setminus E^{(s+1)}$, належить класу $\breve{Y}(\mathfrak{M}_r)$;

б) будь-який комплект $[g]\epsilon\breve{Y}(\mathfrak{M}_r)$ можна продовжити до функції $\bar{g}\epsilon Y(R)$.

Розглянемо деякі відомі факти, що відносяться до розділених різниць, складених по набору як з різними точками, так і з точками, що повторюються.

Нехай $\tau_n = (x_0,x_1,\dots,x_n)$ – набір, складений з $n+1$різних точок. Яким-небудь способом згрупуємо точки набору в $(l+1)$-ну групу і запишемо його у такому вигляді:

$$\tau_n = \left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\dots,x_0^{(p_0)},\dots,x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(p_j)},\dots,x_l^{(1)},x_l^{(2)},\dots,x_l^{(p_l)}\right) =$$

$$= (x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(p_j)})_{j=0}^{l},\ \ \sum_{j=0}^{l} p_j = n+1 \qquad (1.1)$$

Нехай f– функція, що визначена в точках $x_j^{(i)}$набору τ_n. Тоді розділена різниця (0.1) запишеться у вигляді:

$$\left[x_0^{(1)},x_0^{(2)},\dots,x_0^{(p_0)},\dots,x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(p_j)},\dots,x_l^{(1)},x_l^{(2)},\dots,x_l^{(p_l)};f\right] = [\tau_n;f] =$$

$$= \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=1}^{p_j}\frac{f(x_j^{(i)})}{\prod_{k=1(k\neq j)}^{p_j}(x_j^{(i)}-x_j^{(k)})\prod_{m=0(m\neq j)}^{l}\prod_{s=1}^{p_m}(x_j^{(i)}-x_m^{(s)})}$$

або

$$[\tau_n; f] = \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=1}^{p_j} \frac{f(x_j^{(i)}, A_j(x_j^{(i)}))}{\prod_{k=1(k\neq j)}^{p_j}(x_j^{(i)} - x_j^{(k)})}, \tag{1.2}$$

де $A_j\left(x_j^{(i)}\right) = \prod_{m=0(m\neq j)}^{l} \prod_{s=1}^{p_m} (x_j^{(i)} - x_m^{(s)})^{-1}$ (1.3)

В цих позначеннях справедливі наступні твердження.

Лема 1.1. Якщо при деякому фіксованому $j \in \{0,1,2,\dots,l\}$ число $p_j > 1$, та при кожному натуральному $m \le p_j - 1$виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^{p_j} \frac{f\left(x_j^{(i)}\right) A_j(x_j^{(i)})}{\prod_{k=1,k\neq i}^{p_j}(x_j^{(i)} - x_j^{(k)})} = \sum_{i=1}^{m} \left[x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(i)}; f\right] * \left[x_j^{(i)}, \dots, x_j^{(p_j)}; A_j\right] +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{p_j} \left[x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(m)}, x_j^{(i)}; f\right] \frac{A_j(x_j^{(i)})}{\prod_{k=m+1,k\neq i}^{p_j}(x_j^{(i)} - x_j^{(k)})} \tag{1.4}$$

Доведення:

Так як [7, с. 14-16]

$$[x; f] \coloneqq f(x);$$

$$[x, y; f] \coloneqq \frac{[x; f] - [y; f]}{x - y}; \dots;$$

$$[x, y, \dots, z, u, v; f] \coloneqq \frac{[x, y, \dots, z, u; f] - [x, y, \dots, z, v; f]}{u - v},$$

то

$$\sum_{i=1}^{p_j} \frac{f(x_j^{(i)}) A_j(x_j^{(i)})}{\prod_{k=1(k\neq i)}^{p_j}(x_j^{(i)} - x_j^{(k)})} = \left[x_j^{(1)}; f\right] \sum_{i=1}^{p_j} \frac{A_j(x_j^{(i)})}{\prod_{k=1(k\neq i)}^{p_j}(x_j^{(i)} - x_j^{(k)})} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{p_j} \frac{\left[x_j^{(i)}; f\right] - \left[x_j^{(1)}; f\right]}{\prod_{k=1(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)} - x_j^{(k)}\right)} = \left[x_j^{(1)}; f\right] \left[x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(p_j)}; A_j\right]$$

$$+ \sum_{i=2}^{p_j} \left[x_j^{(1)}, x_j^{(i)}; f\right] \frac{A_j\left(x_j^{(i)}\right)}{\prod_{k=m+1(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)} - x_j^{(k)}\right)},$$

Отже, у випадку $m = 1$ рівність (1.4) виконується.

Припустимо, що рівність (1.4) виконується для $m = s\epsilon N$, тобто, що

$$\sum_{i=1}^{p_j} \frac{f(x_j^{(i)})A_j(x_j^{(i)})}{\prod_{k=1(k\neq i)}^{p_j}(x_j^{(i)}-x_j^{(k)})} = \sum_{i=1}^{s} \left[x_j^{(1)},\dots,x_j^{(i)};f\right]\left[x_j^{(i)},\dots,x_j^{(p_j)};A_j\right] +$$

$$\sum_{i=s+1}^{p_j} \left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s)},x_j^{i};f\right] \frac{A_j\left(x_j^{(i)}\right)}{\prod_{k=s+1(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)}-x_j^{(k)}\right)} \tag{1.5}$$

і переконаємось в справедливості її при $m = s + 1$. Отримаємо:

$$\sum_{i=s+1}^{p_j} \left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s)},x_j^{i};f\right] \frac{A_j\left(x_j^{(i)}\right)}{\prod_{k=s+1(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)}-x_j^{(k)}\right)}$$

$$= \left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s)},x_j^{(s+1)};f\right] \frac{A_j\left(x_j^{(i)}\right)}{\prod_{k=s+1(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)}-x_j^{(k)}\right)}$$

$$+ \sum_{i=s+2}^{p_j} \frac{\left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s)},x_j^{(i)};f\right]-\left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s)},x_j^{(s+1)};f\right]}{x_j^{(i)}-x_j^{(s+1)}} \frac{A_j\left(x_j^{(i)}\right)}{\prod_{k=s+1(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)}-x_j^{(k)}\right)}$$

$$= \left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s)},x_j^{(s+1)};f\right]\left[x_j^{(s+1)},x_j^{(s+2)},\dots,x_j^{(p_j)};A_j\right]$$

$$+ \sum_{i=s+2}^{p_j} \left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(s+1)},x_j^{i};f\right] \frac{A_j\left(x_j^{(i)}\right)}{\prod_{k=s+2(k\neq i)}^{p_j}\left(x_j^{(i)}-x_j^{(k)}\right)}$$

Підставивши цю суму замість останнього доданку в правій частині рівності (1.5), отримаємо потрібну рівність.

Лема 1.2. При усіх $j \in \{0,1,2,\dots,l\}$ і кожному натуральному p_j виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^{p_j} \frac{f\left(x_j^{(i)}\right)A_j(x_j^{(i)})}{\prod_{k=1,k\neq i}^{p_j}(x_j^{(i)}-x_j^{(k)})} = \sum_{i=1}^{m} \left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(i)};f\right]\left[x_j^{(i)},\dots,x_j^{(p_j)};A_j\right] \tag{1.6}$$

Доведення.

Якщо $p_j = 1$, то рівність (1.6) переходить в очевидну рівність:

$$f\left(x_j^{(1)}\right)A_j\left(x_j^{(1)}\right) = \left[x_j^{(1)};f\right]\left[x_j^{(1)};A_j\right].$$

Нехай натуральне $p_j > 1$. Поставивши в нерівності (1.4) $m = p_j - 1$ і врахувавши той факт, що остання частина рівності є добутком

$$\left[x_j^{(1)},x_j^{(2)},\dots,x_j^{(p_j)};f\right]\left[x_j^{(i)},\dots,x_j^{(p_j)};A_j\right]$$

переконуємося в справедливості рівності (1.6) і у випадках $p_j > 1$.

Лема доведена.

Враховуючи (1.2) і (1.6) отримаємо, що: для довільного набору τ_n виду (1.1) (кладеного із різних точок $x_j^{(i)}$) і кожної функції f, визначеної в точках $x_j^{(i)}$ має місце узагальнена формула Ерміта:

$$\left[x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(p_0)}, \dots, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(p_j)}, \dots, x_l^{(1)}, \dots, x_l^{(p_l)}; f\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=1}^{p_j} \left[x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(i)}; f\right] \left[x_j^{(i)}, \dots, x_j^{(p_j)}; A_j\right] \tag{1.7}$$

в якій функція $A_j \equiv A_j(x)$ визначається формулою (1.3).

Зафіксуємо натуральне k, ціле $r \geq 0$і натуральні числа $p_0, p_1, \dots, p_l$, що задовольняють умову $p_0 + p_1 + \dots + p_l = k + r + 1$. Нехай набір $\tilde{\tau}_{k+r}$ записано у вигляді (1.1) і нехай набір

$$\tau_{k+r} = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j})_{j=0}^{l}, \tag{1.8}$$

такий, що:

а) при кожному можливому значенні $j x_{j1} = x_{j2} = \dots = x_{jp_j} := \check{x}_j$;

б) $\check{x}_j \neq \check{x}_i$при $i \neq j$.

Запис$\tilde{\tau}_{k+r} \to \tau_{k+r}$ означає, що при кожному $j \epsilon \{0,1,2, \dots, l\}$ і будь-якому $i = \{1,2, \dots, p_j\} x_j^{(i)} \to x_{ji} = \check{x}_j$.

Зауваження. Нехай зафіксовані: $p \epsilon N$; r – невід'ємне ціле число, $r \leq p$, $\check{x} \epsilon R, f = f(x)$ – задана в деякому околі$O(\check{x})$точки $\check{x}$, що має в $O(\check{x})$ неперервні похідні до p-го порядку включно. Нехай, далі, $\tilde{\tau}_r = (x_0, x_1, \dots, x_r)$, який-небудь набір різних точок із $O(\check{x})$. Тоді якщо при кожному $i \epsilon \{0,1,2, \dots, r\} x_i \to \check{x}$, то

$$\{x_0, x_1, \dots, x_r; f\} \to \frac{f^{(r)}(\check{x})}{r!}. \tag{1.9}$$

Дійсно, якщо функція f задовольняє вказаним умовам, то при кожному наборі τ_r виконується рівність (див., наприклад, [7, с. 23]):

$$[\tau_r; f] = [x_0, x_1, \dots, x_r; f] = \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}, \qquad (1.9)^{/}$$

де $\xi \epsilon (x_0, x_r)$. Переходячи до границі (при $x_i \to \breve{x}$) і враховуючи неперервність похідної $f^{(r)}(x)$ в $O(\breve{x})$, отримаємо рівність (1.9).

Нехай тепер задані: $l \geq 0$ – ціле число; j – індекс, що пробігає множину $\{0,1,2,\dots,l\}$; n – натуральне число, $n \geq l$, p_j – натуральні числа, що задовольняють умову $p_0 + p_1 + \dots + p_l = n + 1$, $\breve{x}_j$ – точки на R такі, що $\breve{x}_0 < \breve{x}_1 < \dots < \breve{x}_l$, δ_j – деякі додатні числа, що при кожному $i \neq j$

$$\left[\breve{x}_j; \breve{x}_j + \delta_j\right) \cap [\breve{x}_i; \breve{x}_i + \delta_i) = \emptyset.$$

Нехай, крім того, f задана на множині $\Upsilon = \bigcup_{j=0}^{l}\left[\breve{x}_j; \breve{x}_j + \delta_j\right)$ – функція, яка на півінтервалах$\left[\breve{x}_j; \breve{x}_j + \delta_j\right)$має неперервні похідні до $(p_j - 1)$-го порядку включно, $\tau_n = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j})_{j=0}^{l}$ – записаний у вигляді (1.8) набір (в якому $x_{ji} = \breve{x}_j$ при всіх $i = \{1,2,\dots,p_j\}$); $\tau_n = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(p_j)})_{j=0}^{l}$ – набір такий, що при всіх j: $\breve{x}_j = x_j^{(1)} < x_j^{(2)} < \dots < x_j^{(p_j)} < \breve{x}_j + \delta_j$.

Зауваження. Формула (0.2) є граничним виразом формули (1.2) при $\tilde{\tau}_n \to \tau_n$, тобто

$$\left[x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}; f\right] =$$

$$\lim_{x_j^{(i)} \to x_{ji}} \left[x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(p_0)}, \dots, x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(p_j)}, \dots, x_l^{(1)}, x_l^{(2)}, \dots, x_l^{(p_l)}; f\right], \qquad (1.10)$$

$(i = \{1,2,\dots,p_j\}$, або в скороченій формі:

$$[\tau_n; f] = \lim_{\tilde{\tau}_n \to \tau_n} [\tilde{\tau}_n; f] \qquad (1.10')$$

§ 2.Теореми про сліди

Надалі будемо завжди вважати, що k та r – задані натуральні числа і $\varphi = \varphi(t)$ – фіксована функція типу k-го модуля неперервності.

Нехай $\mathfrak{M}_m = \{E^{(s)}\}_{s=0}^{m}$–незростаюча система множин на числовій осі, τ_{k+r}–довільний набір точок з цієї системи, тобто $\tau_{k+r} = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jp_j})_{j=0}^{l}$ – набір, в якому деякі точки можуть повторюватись ($p_j \leq m+1$). Для того, щоб комплект $[f] \epsilon W^r \breve{H}_k^{\varphi}(\mathfrak{M}_m)$, був слідом на системі множин $\mathfrak{M}_m$ деякої функції $\bar{f} \epsilon W^r \breve{H}_k^{\varphi}(R)$, необхідно,щоб при кожному $s \epsilon \{0,1,2,\ldots,r\}$і всіх $x \epsilon E^{(s)}$ виконувалась умова $\bar{f}^{(s)} = f_s(x)$. Так як $\bar{f} \epsilon W^r \breve{H}_k^{\varphi}(R)$, тобто функція

$\bar{f}(x)$неперервно-диференційовна на R тільки r раз, то далі будемо розглядати тільки такі системи множин $\mathfrak{M}_m$, в яких mне перевищує r, а в наборах τ_{k+r}, записаних у вигляді (1.8), p_j не повинно, відповідно, бути більшим $r+1$.

Крім того, при визначенні величин $\Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r},\varphi)$і$\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r},\varphi)$вважалось, що набори τ_{k+r} складені із різних точок числової осі. Покажемо, що останнє твердження несуттєве. Дійсно, якщо в наборах $\tau_{k+r}=(x_{j1},x_{j2},\dots,x_{jp_j})_{j=0}^{l}$, $\sum_{j=0}^{l}p_j=k+r+1$, записаних у вигляді (1.8) всі $p_j\le r+1$ та $\check{x}_0<\check{x}_1<\dots<\check{x}_l$, то записавши їх у вигляді $\tau_{k+r}=(x_i)_{i=0}^{k+r}$(при виконанні умови$x_0\le x_1\le\dots\le x_{k+r}$) та застосувавши формулу (0.6) можна побачити, що при кожному $i\epsilon\{0,1,\dots,p-1\}$і фіксованому$q\ge p+r+1$множники $x_q-x_i\ge x_q-x_{p-1}>0$(так як$q-(p-1)\ge r+2$)і при всіх $i\epsilon\{q+1,q+2,\dots,k+r\}, q\ge p+r+1$множники $x_q-x_i\ge x_q-x_{p-1}>0$. Отже, за формулою (0.6) і у випадках наборів τ_{k+r} з точками, що повторюються визначаються скінченні величини $\Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r},\varphi)$, а з ними і число $\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r},\varphi)$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Для кожної функції $f\epsilon W^rH[k,R,\varphi]$і будь-якого набору τ_{k+r} має місце нерівність:

$$\left\|\left[x_{01},x_{02},\dots,x_{0p_0},\dots,x_{j1},x_{j2},\dots,x_{jp_j},\dots,x_{l1},x_{l2},\dots,x_{lp_l};f\right]\right\|$$
$$\le c\Lambda_{k,r}(x_{01},x_{02},\dots,x_{0p_0},\dots,x_{j1},x_{j2},\dots,x_{jp_j},\dots,x_{l1},x_{l2},\dots,x_{lp_l};\varphi)$$

в якій $c=c(k,r)$ залежить тільки від k та r.

Доведення.

В наборі $\tau_{k+r}=(x_{j1},x_{j2},\dots,x_{jp_j})_{j=0}^{l}$, $p_j\le r+1$ та $\check{x}_0<\check{x}_1<\dots<\check{x}_l$, причому різними точками є тільки $\check{x}_j$. Позначимо $\sigma=min\{\check{x}_1-\check{x}_0,\check{x}_2-\check{x}_1,\dots,\check{x}_l-\check{x}_{l-1}\}$. Маючи додатне σ, візьмемо яке-небудь число $\varepsilon=\left(0,\frac{\sigma}{10r}\right)$ і позначимо $\tilde{x}_j^{(i)}=\check{x}_j+(i-1)\varepsilon$, де $i=\{1,2,\dots,p_j\}$ і побудуємо набір

$$\tilde{\tau}_{k+r}=(\tilde{x}_j^{(1)},\tilde{x}_j^{(2)},\dots,\tilde{x}_j^{(p_j)})_{j=0}^{l}.$$

В ньому всі точки різні, причому $\tilde{x}_0^{(1)} < \tilde{x}_0^{(2)} < \cdots < \tilde{x}_l^{(1)} < \tilde{x}_l^{(2)} < \cdots < \tilde{x}_l^{(p_l)}$ і внаслідок вибору числа ε при кожному $i = \{1,2,\dots,p_j\}$ та всіх $s\epsilon\{1,2,\dots,p_m\}$справедлива нерівність $\left|\tilde{x}_m^{(s)} - \tilde{x}_j^{(i)}\right| > 0{,}9\frac{\sigma}{r}$ при $m \neq j$.

Так як $f\epsilon W^r H[k,R,\varphi]$, то внаслідок теореми 3.1 із [8], буде виконуватися нерівність:

$$\left\|\left[\tilde{x}_0^{(1)}, \tilde{x}_0^{(2)}, \dots, \tilde{x}_0^{(p_0)}, \dots, \tilde{x}_l^{(1)}, \tilde{x}_l^{(2)}, \dots, \tilde{x}_l^{(p_l)}; f\right]\right\| \leq$$

$$c\Lambda_{k,r}(\tilde{x}_0^{(1)}, \tilde{x}_0^{(2)}, \dots, \tilde{x}_0^{(p_0)}, \dots, \tilde{x}_l^{(1)}, \tilde{x}_l^{(2)}, \dots, \tilde{x}_l^{(p_l)}; \varphi), \qquad (1.12)$$

в якій $c = c(k,r)$ залежить тільки від k та r.

Враховуючи, що при всіх $i = \{1,2,\dots,p_j\}$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{x}_j^{(i)} = x_{ji} = \check{x}_j$ і те, що $\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{\tau}_{k+r} = \tau_{k+r}$, внаслідок (1.10)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\tilde{\tau}_{k+r}; f] = [\tau_{k+r}; f]$$

Тоді, внаслідок (1.12) буде виконуватись нерівність:

$$\left\|\left[x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}; f\right]\right\| \leq$$

$$c \lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{k,r}(\tilde{x}_0^{(1)}, \tilde{x}_0^{(2)}, \dots, \tilde{x}_0^{(p_0)}, \dots, \tilde{x}_l^{(1)}, \tilde{x}_l^{(2)}, \dots, \tilde{x}_l^{(p_l)}; \varphi) \qquad (1.13)$$

Величини $\Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r},\varphi)$і$\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r},\varphi)$ розглядаються лише при $p\epsilon\{0,1,\dots,k-1\}$і$q\epsilon\{p+r+1, p+r+2, \dots, k+r\}$(див. (0.3)). Отже, в формули (0.6) будуть входити лише різниці $\tilde{x}_m^{(s)} - \tilde{x}_j^{(i)}$з різними індексами. Але тоді при всіх можливих значеннях m, s, i та j

$$\left|\tilde{x}_m^{(s)} - \tilde{x}_j^{(i)}\right| > 0{,}9\frac{\sigma}{r}$$

і, крім того, $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\tilde{x}_m^{(s)} - \tilde{x}_j^{(i)}\right) = x_{ms} - x_{ji}$, причому $\left|x_{ks} - x_{ji}\right| \geq \sigma$. Тому при всіх можливих значеннях p та q

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{p,q,k,r}(\tilde{x}_0^{(1)}, \tilde{x}_0^{(2)}, \dots, \tilde{x}_0^{(p_0)}, \dots, \tilde{x}_l^{(1)}, \tilde{x}_l^{(2)}, \dots, \tilde{x}_l^{(p_l)}; \varphi)$$
$$= \Lambda_{p,q,k,r}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}; \varphi)$$

і

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{k,r}\left(\tilde{x}_0^{(1)}, \dots, \tilde{x}_l^{(p_l)}; \varphi\right) = \Lambda_{k,r}(x_{01}, \dots, x_{lp_l}; \varphi)$$

Враховуючи (1.13) та встановлену тільки що рівність, отримаємо оцінку (1.11).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2.

Для будь-якої незростаючої системи $\mathfrak{M}_r$будь-якого комплекту $[f]\epsilon W^r \breve{H}[k, \mathfrak{M}_r; \varphi]$знайдеться функція $\bar{f}(x) = \bar{f}$така, що:

а) при будь-якому $s\epsilon\{0,1,2, \dots, r\}$і всіх $x\epsilon E^{(s)}$ її похідна порядку s буде дорівнювати функції $f_s(x)$, тобто$\bar{f}^{(s)}(x) = f_s(x)$, якщо $x\epsilon E^{(s)}$ та

б) $\bar{f}\epsilon cW^r H(k; R; \varphi)$, де $c = c(k, r)$.

Доведення.

Доведення теореми проведемо в три етапи.

1. Нехай $E^{(0)}$ – скінченна множина будемо вважати $E^{(0)} = \{t_j\}_{j=1}^{\alpha}$, причому $t_1 < t_2 < \dots < t_\alpha$, (де $\alpha\epsilon N$). Крім того, позначимо $\sigma \coloneqq min\{t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_\alpha - t_{\alpha-1}\}$. Кожному $j\epsilon\{1,2, \dots, \alpha\}$співставимо число $m_j\epsilon\{0,1,2, \dots, r\}$ таке, що точка $t_j\epsilon E^{(m_j)} \backslash E^{(m_j+1)}$. Маючи $\sigma > 0$ виберемо яке-небудь $\varepsilon\epsilon(0, \frac{\sigma}{10r})$і позначимо:

$$\tilde{x}_j^{(i)} \coloneqq t_j + (j-1)\varepsilon, i\epsilon\{1,2, \dots, m_{j+1}\}, \tag{1.14}$$

і, таким чином, кожну точку $t_j\epsilon E^{(0)}$ «розтягнемо» в точки $\tilde{x}_j^{(1)} = t_j, \tilde{x}_j^{(2)}, \dots, \tilde{x}_j^{(m_j+1)}$. Всі вони будуть належати півінтервалу$[t_j, t_j + 0{,}1\sigma)$ (за побудовою).

Тепер з допомогою заданого на $\mathfrak{M}_r$комплекта$[f]$ визначимо на множині$\mathcal{Y} = \cup_{j=1}^{k}[t_j; t_j + m_j\varepsilon)$допоміжну функцію $\tilde{f}(\varepsilon; x)$, поклавши

$\tilde{f}(\varepsilon; x) = \sum_{s=0}^{m_j} \frac{f_s(t_j)}{s!}(x - t_j)^s$, якщо $x\epsilon[t_j; t_j + m_j\varepsilon)$ (1.15)

Позначимо, крім того

$$\tilde{E}_\varepsilon^{(0)} \coloneqq \left\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots x_j^{(m_j+1)}\right\}_{j=1}^{\alpha}$$

і візьмемо який-небудь набір $\tilde{\tau}_{k+r}$, складений із $(k+r+1)$-их різних точок $\tilde{E}_{\varepsilon}^{(0)}$. Враховуючи (1.14) при всіх $j\epsilon\{1,2,\dots,\alpha\}$ і кожному $i\epsilon\{1,2,\dots,m_{j+1}\}, m_j \leq r$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{x}_j^{(i)} = t_j \epsilon E^{(0)},$$

а тому

$\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{\tau}_{k+r} = \tau_{k+r} \epsilon\, \Upsilon(\mathfrak{M}_r)$

(1.16) тобто кожному побудованому набору $\tilde{\tau}_{k+r}$ точок із $\tilde{E}_{\varepsilon}^{(0)}$ відповідає один набір $\tau_{k+r}\epsilon\Upsilon(\mathfrak{M}_r)$ (враховуючи (1.16)). Легко помітити, що кожному набору τ_{k+r} із $\Upsilon(\mathfrak{M}_r)$ при будь-яких $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність набір $\tilde{\tau}_{k+r}$, складений із різних точок множини $\tilde{E}_{\varepsilon}^{(0)}$. Таким чином, $\forall\varepsilon > 0$ між наборами $\tilde{\tau}_{k+r}$ та τ_{k+r} існує бієктивне відображення.

Функція $\tilde{f}(\varepsilon; x)$ визначена на $\tilde{E}_{\varepsilon}^{(0)}$, при чому $\tilde{E}_{\varepsilon}^{(0)} \subset \mathcal{Y}$. Тому для будь-якого набору $\tilde{\tau}_{k+r}$ визначена і розділена різниця $\left[\tilde{\tau}_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon; x)\right]$ (за допомогою формули (0.1)). В силу (1.16) та (1.10) справедлива рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\tilde{\tau}_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon; x)\right] = \left[\tau_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon; x)\right]$$

в якій $\left[\tau_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon; x)\right]$ визначається по формулі (0.2).

Але для $\forall k\epsilon\{0,1,2,\dots,m_{j+1}\}$і всіх $x\epsilon\left[t_j; t_j + m_j\varepsilon\right]$ в силу (1.15)

$$\tilde{f}^{(k)}(\varepsilon; x) = \sum_{s=k}^{m_j} \frac{f_s(t_j)}{(s-k)!}(x - t_j)^{s-k}$$

Тому $\tilde{f}^{(k)}(\varepsilon; t_j) = f_k(t_j)$. Враховуючи тепер (0.10), переконуємося в справедливості рівностей

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\tilde{\tau}_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon;*)\right] = \left[\tau_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon;*)\right] = \left[\tau_{k+r}; [f]\right] \qquad (1.17)$$

Аналогічними міркуваннями доводиться і справедливість рівності:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{k,r}(\tilde{\tau}_{k+r}; \varphi) = \Lambda_{k,r}(\tau_{k+r}; \varphi) \qquad (1.18)$$

Нехай

$$\Lambda \coloneqq \min_{\tilde{\tau}_{k+r}}(\tilde{\tau}_{k+r}; \varphi)$$

Так як $E^{(0)}$ – скінченна множина, то і множина $\tilde{E}^{(0)}$ також скінченна. Отже існує скінченне число наборів $\tilde{\tau}_{k+r}$. Тому число $\Lambda > 0$ нерівностей виду (1.17) та (1.18) – скінченне число. Отже, існує додатне число $\varepsilon_0, \varepsilon_0 \leq \frac{\sigma}{10r}$, таке, що $\forall\varepsilon > 0\epsilon(0; \varepsilon_0]$ і кожного набору $\tilde{\tau}_{k+r}$ справедливі оцінки:

$$\left|\left[\tilde{\tau}_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon;*)\right] - \left[\tau_{k+r}; [f]\right]\right| \leq \Lambda;$$

$$\left|\Lambda_{k,r}(\tilde{\tau}_{k+r}; \varphi) - \Lambda_{k,r}(\tau_{k+r}; \varphi)\right| \leq \Lambda;$$

(в яких $\tau_{k+r} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\tau}_{k+r}$).

Нехай $[f]\epsilon W^r \breve{H}[k, \mathfrak{M}_r; \varphi]$. Тоді $\forall\varepsilon > 0\epsilon(0; \varepsilon_0]$ і кожному наборі $\tilde{\tau}_{k+r}$ (складеному із різних чисел множини $\tilde{E}_\varepsilon^{(0)}$).

$$\left|\left[\tilde{\tau}_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon;*)\right]\right| \leq \left|\left[\tilde{\tau}_{k+r}; \tilde{f}(\varepsilon;*)\right] - \left[\tau_{k+r}; [f]\right]\right| + \left|\left[\tau_{k+r}; [f]\right]\right|$$
$$\leq \Lambda + \left|\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r}; \varphi) - \Lambda_{k,r}(\tilde{\tau}_{k+r}; \varphi)\right| + \Lambda_{k,r}(\tilde{\tau}_{k+r}; \varphi)$$
$$\leq 2\Lambda + \Lambda_{k,r}(\tau_{k+r}; \varphi) \leq 3\Lambda_{k,r}(\tilde{\tau}_{k+r}; \varphi)$$

Отже, $\forall\varepsilon > 0\epsilon(0; \varepsilon_0]$ функція $\tilde{f}(\varepsilon; x)\epsilon 3W^r \breve{H}\left[k, \tilde{E}_\varepsilon^{(0)}; \varphi\right]$.

Тоді, при кожному$\forall\varepsilon > 0\epsilon(0; \varepsilon_0]$ існує функція $\bar{f}(\varepsilon; x)\epsilon cW^r \breve{H}[k, R; \varphi](c = c(k, r)$–деяка стала більша нуля) така, що

$\bar{f}(\varepsilon; x)$=$\tilde{f}(\varepsilon; x)$, якщо $x\epsilon\tilde{E}_\varepsilon^{(0)}$ (1.19)

Доведемо тепер рівномірну обмеженість на сегменті$[t_1; t_\alpha + (m_\alpha - 1)\varepsilon_0] = [a, b]$множини функцій $F_\varepsilon \coloneqq \left\{\bar{f}(\varepsilon,*)\right\}_{\varepsilon\epsilon(0;\varepsilon_0]}$ (тут ε_0 – фіксоване додатне число із $(0; \frac{\sigma}{10r})$), тобто доведемо, що існує стала $M > 0$ така, що при будь-яких $\varepsilon\epsilon(0; \varepsilon_0]$ і довільному $t\epsilon[a, b]$виконується нерівність

$$\left|\bar{f}(\varepsilon, t)\right| \leq M(1.20)$$

Дійсно, нехай $\tilde{\tau}_{k+r}$ – який-небудь фіксований набір різних точок множини $E_{\varepsilon_0}^{(0)}$. З допомогою двох нижніх індексів занумеруємо точки набору τ_{k+r}^* так, щоб, по-перше, кожна наступна точка набору була числом більше попереднього і, по-друге, щоб всі точки цього набору мали один і той самий перший індекс тоді і тільки тоді, коли вони належать множині$\{t_j, t_j+\varepsilon_0, t_j+2\varepsilon_0, \dots, t_j+(m_j-1)\varepsilon_0\}$. Нехай

$$\tau_{k+r}^* = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}).$$

Відмітимо, що при такому запису набору τ_{k+r}^* число $l \leq \alpha-1$ і натуральні числа $p_i \leq m_i \leq r+1$при всіх $i\epsilon\{0,1,2,\dots,l\}$. Зрозуміло також, що $p_0+p_1+\dots+p_l = k+r+1$.

Набір τ_{k+r}^* визначається набором параметрів ε_0, l та p_i. Зберігаючи значення l та p_i і замінивши ε_0 на $\varepsilon\epsilon(0;\varepsilon_0)$, отримаємо новий набір (із різних точок $E_\varepsilon^{(0)}$), який будемо позначати через τ_{k+r}. Нехай тепер t – довільна взята точка із $[a,b]$ і τ_{k+r} – набір, що відповідає довільно взятому $\varepsilon\epsilon(0;\varepsilon_0]$. Замінимо точкою t найближчу (або одну з найближчих) до неї точку $x_{i\nu}$ набору τ_{k+r} і отриманий набір позначимо через $\check{\tau}_{k+r}$.

Доведемо спочатку справедливість оцінки

$$\left|\left[\check{\tau}_{k+r};\ \bar{f}(\varepsilon,*)\right]\right| \leq M_1, \qquad (1.21)$$

в якій M_1 – додатна стала, що не залежить від ε та t. Дійсно, так як $\bar{f}(\varepsilon;*)\epsilon cW^r H[k,R;\varphi]$, то в силу теореми 1.3 із [16] має місце нерівність

$$\left|\left[\check{\tau}_{k+r};\ \bar{f}(\varepsilon,*)\right]\right| \leq c(k+r)\Lambda_{k,r}(\check{\tau}_{k+r};\varphi) \qquad (1.22)$$

в якій $\Lambda_{k,r}(\check{\tau}_{k+r};\varphi)$ визначається за допомогою формул (0.6) – (0.8). Хоча в набір $\check{\tau}_{k+r}$ входить точка t і цей набір залежить від ε, але при всіх допустимих значеннях i,p та qвсі різниці видуx_i-x_p, x_q-x_i таx_q-x_p, що входять в праву частину (0.6) мають значення більше $0{,}4\sigma$. Тому існують строго додатні числа $M(p,q,\sigma,\varphi)$, що не залежать від ε та t і такі, що величини

$$\Lambda_{p,q,k,r}(\check{\tau}_{k+r};\varphi) \leq M(p,q,\sigma,\varphi)$$

Звідки

$$\max_{(p,q)\epsilon B_{k,r}} \{M(p,q,\sigma,\varphi)\} =: M(\sigma,\varphi) = M_1 < +\infty$$

і має місце оцінка:

$$\Lambda_{k,r}(\check{\tau}_{k+r};\varphi) \leq M_1.$$

Враховуючи тепер (1.22), отримаємо оцінку (1.21).

Доведемо тепер нерівність (1.20). Нехай $\check{\tau}_{k+r} = \tau_{k+r}$, тобто $t = x_{i\nu}$ і$x_{i\nu} \epsilon \{t_j, t_j + \varepsilon, t_j + 2\varepsilon, \dots, t_j + (m_j - 1)\varepsilon\}$. Так як $\bar{f}(\varepsilon; x)$=$\tilde{f}(\varepsilon; x)$, якщо $x \epsilon E_{\varepsilon}^{(0)}$, то згідно (1.15)

$$\bar{f}(\varepsilon; x_{i\nu})=\tilde{f}(\varepsilon; x) = \bar{f}(\varepsilon; x) = \sum_{s=0}^{m_{ji}-1} \frac{f_s(t_{ji})}{s!}(x_{i\nu} - t_{ji})^s.$$

А тоді

$$\left|\tilde{f}(\varepsilon; x_{i\nu})\right| \leq \sum_{s=0}^{m_{ji}-1} \frac{f_s(t_{ji})}{s!}(b-a)^s < M < +\infty$$

Ясно, що M не залежить від ε та t, отже, у випадку $t = x_{i\nu}$ нерівність (1.20) справедлива.

Нехай $\check{\tau}_{k+r} \neq \tau_{k+r}$, тобто t не співпадає з жодною точкою набору τ_{k+r}. Запишемо набір $\check{\tau}_{k+r}$ у вигляді

$$\check{\tau}_{k+r} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{(i-1)1}, x_{(i-1)2}, \dots, x_{(i-1)p_{i-1}}, x_{i1}, x_{i2}, \dots,$$
$$x_{i(\nu-1)}, x_{i(\nu+1)}, x_{i(\nu+2)}, \dots, x_{ip_i}, x_{(i+1)1}, x_{(i+1)2}, \dots, x_{(i+1)p_{i+1}}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lp_l}, t)$$

і будемо розглядати його як набір, що складається з $(l+1)$-ї групи точок, причому в групі точок з першим індексом $j \epsilon \{0,1,2, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, l\}$ їх є p_j, в групі точок з першим індексом i їх є $(p_j - 1) - a$ і в $(l+1)$-й (останній) групі є лише одна точка t. Відмітимо також, що всі точки набору $\check{\tau}_{k+r}$, крім точки t, належать множині $E_{\varepsilon}^{(0)}$.

Із узагальненої формули Ерміта знаходимо, що

$$\bar{f}(\varepsilon; t) = (-\sum_{\substack{j=0 \\ (j \neq i)}}^{l} \sum_{\mu=1}^{p_j} \left[x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j\mu}; \bar{f}(\varepsilon; *)\right] \left[x_{j\mu}, x_{j(\mu+1)}, \dots, x_{jp_j}; A_j\right]$$
$$+ \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{p_i} \left[x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i\mu}; \bar{f}(\varepsilon; *)\right] \left[x_{i\mu}, x_{i(\mu+1)}, \dots, x_{ip_i}; A_i\right]$$
$$+ \quad [\check{\tau}_{k+r}; \bar{f}(\varepsilon; *)]) \prod_{\lambda=0}^{l} \prod_{n=1}^{p_\lambda} (t - x_{\lambda n})$$

(1.23)

(при $\lambda \neq i, n \neq \nu$), де

$$A_j(y) = \prod_{\substack{\eta=0 \\ (\eta\neq j)}}^{l+1} \prod_{n=1}^{p_\eta} (y - x_{\eta n})^{-1} \tag{1.24}$$

Враховуючи (1.9$'$) і той факт, що $\bar{f}(\varepsilon; x) = \tilde{f}(\varepsilon; x)$, якщо $x \epsilon E_\varepsilon^{(0)}$, отримаємо рівність:

$$\left|\left[x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j\mu}; \bar{f}(\varepsilon;*)\right]\right| = \left|\left[x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j\mu}; \tilde{f}(\varepsilon;*)\right]\right| = \frac{1}{(\mu-1)!}\left|\tilde{f}^{(\mu-1)}(\varepsilon;\xi)\right|$$

де $x_{j1} < \xi < x_{j\mu}$.

Нехай $c_0 = \max_{s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}} \max_{t\epsilon E^{(s)}}\{|f_s(t)|\}$. Так як множина $E^{(0)}$ скінченна, то число $c_0 < +\infty$. Враховуючи той факт, що функція (многочлен) $\tilde{f}(\varepsilon; x)$ визначена за формулою (1.15) і що $|\xi - t_j| \leq b - a$ отримаємо оцінку:

$$\left|\tilde{f}^{(\mu-1)}(\varepsilon;\xi)\right| \leq \sum_{s=\mu-1}^{r} \frac{c_0(b-a)^{s-\mu+1}}{(s-\mu+1)!} = M_2$$

тобто при всіх допустимих j і μ має місце нерівність:

$$\left|\left[x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j\mu}; \bar{f}(\varepsilon;*)\right]\right| \leq M_2\,, \qquad (1.25)$$

де M_2 не залежить від ε і t.

Має місце і рівність:

$$\left[x_{j\mu}, x_{j(\mu+1)}, \dots, x_{jp_j}; A_j\right] = \frac{A_j^{(p_j-\mu+1)}(\xi)}{(p_j-\mu+1)!},$$

в якій $x_{j\mu} < \xi < x_{jp_j}$. Так як функції $A_j(y)$ визначаються за формулою (1.24), то їх похідні (різних порядків) також будуть визначатись з допомогою добутків різниць $(y - x_{\eta n})$. І якщо $j \neq i$і $\xi \epsilon (x_{j\mu}, x_{jp_j})$, то $|\xi - x_{\eta n}| > 0{,}4\sigma$, а тоді

$$\left[x_{j\mu}, x_{j(\mu+1)}, \dots, x_{jp_j}; A_j\right] = \frac{1}{(p_j-\mu+1)!}\left|A_j^{(p_j-\mu+1)}(\xi)\right| \leq M_3,$$

де M_3 незалежить від ε і t.

Розглянемо тепер випадок, коли $j = i$. Нехай спочатку точка t розміщена на R так, що $|t - x_{iv}| \leq 2r\varepsilon$. Тоді при всіх x_{in} із набору$\check{\tau}_{k+r}$ $|t - x_{in}| < 4r\varepsilon$. Всіх множників у добутку

$$\prod_{n=1\ (n\neq\nu)}^{p_i} (t - x_{in})$$

буде $p_i - 1$. Враховуючи $1 \leq \mu \leq \nu$, маємо

$$\left[x_{i\mu}, x_{i(\mu+1)}, \dots, x_{i(\nu-1)}, x_{i(\nu+1)}, \dots, x_{ip_i}; A_i\right]$$
$$= \sum_{\substack{m=\mu \\ (m\neq\nu)}}^{p_i} A_i(x_{im}) \prod_{\substack{n=\mu \\ (n\neq m, n\neq\nu)}}^{p_i} (x_{im} - x_{in})^{-1}$$

В добутку $\prod_{n=\mu}^{p_i}(x_{im} - x_{in})^{-1}$ множників $p_i - \mu - 1 \leq p_i - 2$.

В силу (1.24) справедлива оцінка $|A_i(x_{im})| \leq M_3$, в якій M_3 – стала, яка незалежить від ε і t. Але тоді

$$\left|\left[x_{j\mu}, x_{j(\mu+1)}, \dots, x_{i(\nu-1)}, x_{i(\nu+1)}, \dots, x_{jp_j}; A_j\right] \prod_{\lambda=0}^{l} \prod_{n=1}^{p_\lambda} (t - x_{\lambda n}) \prod_{n=1\ (n\neq\nu)}^{p_i} (t - x_{in})\right|$$
$$\leq \sum_{\substack{m=\mu \\ (m\neq\nu)}}^{p_i} |A_i(x_{im})| \prod_{\lambda=0}^{l} \prod_{n=1}^{p_\lambda} |t - x_{\lambda n}| \frac{\prod_{n=1\ (n\neq\nu)}^{p_i} |t - x_{in}|}{\prod_{\substack{n=\mu \\ (n\neq m, n\neq\nu)}}^{p_i} |x_{im} - x_{in}|}$$
$$\leq M_4(k, r, \sigma) = M_4 < +\infty \qquad (1.26)$$

Аналогічні міркування показують, що оцінка (1.26) залишається справедливою і коли $\gamma < \mu \leq p_i$ (при умові, що $|t - x_{iv}| \leq 2r\varepsilon$).

Нехай $|t - x_{iv}| > 2r\varepsilon$. Так як (в силу (1.9$'$))

$$\left[x_{i\mu}, x_{i(\mu+1)}, \dots, x_{ip_i}; A_i\right] = \frac{1}{(p_i - \mu + 1)!} A_i^{(p_i - \mu + 1)}(\xi),$$

де $x_{i\mu} < \xi < x_{ip_i}$і згідно (1.24) вираз

$$A_i(y) = \frac{1}{(y - t) \prod_{\substack{m=0 \\ (m\neq i)}}^{l} \prod_{n=1}^{p_m} (y - x_{mn})},$$

то кожен із доданків, з яких складається $A_i^{(p_i-\mu+1)}(\xi)$, буде містити не більше ніж $p_i-\mu$ співмножників виду $\xi-x_{in}$. Тому

$$\left\|\left[x_{j\mu}, x_{j(\mu+1)}, \dots, x_{i(\nu-1)}, x_{i(\nu+1)}, \dots, x_{jp_j}; A_j\right]\right\| \prod_{\lambda=0}^{l}\prod_{n=1}^{p_\lambda}|t-x_{\lambda n}| \prod_{n=1\ (n\neq\nu)}^{p_i}|t-x_{in}|$$

$$=\frac{1}{(p_i-\mu+1)!}A_i^{(p_i-\mu+1)}(\xi)\cdot M_5\prod_{n=1\ (n\neq\nu)}^{p_i}|t-x_{in}|\leq M_6<$$

$$<+\infty, \tag{1.27}$$

де M_6 – стала, яка незалежить від ε і t.

Враховуючи (1.23) і оцінки (1.25) і (1.27), отримаємо нерівність (1.20). цим доведення рівномірної обмеженості сім'ї функцій F_εзавершено.

Доведемо тепер, що і сім'ї$F_\varepsilon^{(j)}=\{\bar{f}^{(j)}(\varepsilon;*)\}_{\varepsilon\epsilon(0,\varepsilon_0]}$похідних порядку $j, j\epsilon\{1,2,\dots,r\}$, від F_ε також рівномірно обмежені. Відомо, що якщо функція$f\epsilon W^rH[k,[a,b],\varphi]$, то при кожному$j\epsilon\{1,2,\dots,r\}$справедлива оцінка

$$\left\|f^{(j)}\right\|_{C_{[a,b]}}\leq c\left((b-a)^{-j}\|f\|_{C_{[a,b]}}+(b-a)^{r-j}\varphi(b-a)\right),$$

в якій додатна стала c залежить тільки від r і k. Так як сім'яF_εрівномірно обмежена, то в силу тільки що згаданого результату О. В. Бєсова слідує рівномірна обмеженість і множин $F_\varepsilon^{(j)}$ (на $[a,b]$).

Сім'ї $F_\varepsilon^{(i)}$, і$\epsilon\{1,2,\dots,\mathrm{r}\}$ також рівномірно неперервні на $[a,b]$, тобто для будь-якого $\eta>0$ існує $\delta>0$ таке, що нерівність

$\left|\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;x')-\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;x'')\right|<\eta$(1.28) справедлива при всіх $\varepsilon\epsilon(0,\varepsilon_0]$, кожному iі будь-яких x' і x'' з $[a,b]$, зв'язаних нерівністю $t:=|x'-x''|<\delta$.

Дійсно,

$$\left|\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;x')-\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;x'')\right|\leq\omega_1\left(\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;*);t\right).$$

Нехай $k=1$. Так як $\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;*)\epsilon CW^rH[1,[a,b],\varphi]$, то (за означенням цього класу) $\omega_1\left(\bar{f}^{(i)}(\varepsilon;*);t\right)\leq\varphi(t)$, при чому константа C загальна для всіх функцій класу. Так як φ =неперервна функція і $\varphi(0)=0$, то у випадку $k=1$

множина $F_\varepsilon^{(r)}$ рівномірно неперервна. Якщо ж $i\epsilon\{1,2,\dots,r-1\}$ і $k\geq 1$, то в силу співвідношень:

$$\omega_{r-i+1}\big(\bar f^{(i)}(\varepsilon;*);u\big)\leq u^{r-i}\omega_1\big(\bar f^{(r)}(\varepsilon;*);u\big)\leq Cu^{r-i}\varphi(u)$$

і теореми Маршо[9]

$$\omega_1\big(\bar f^{(i)}(\varepsilon;*);t\big)\leq C^*t\left(\int_t^{b-a}\omega_{r-i+1}\big(\bar f^{(i)}(\varepsilon;*);u\big)u^{-2}du+\frac{\left\|\bar f^{(i)}(\varepsilon;*)\right\|_{C_{[a,b]}}}{b-a}\right)\leq$$

$$\leq C^*t\left(\int_t^{b-a}Cu^{r-i-2}\varphi(u)du+\frac{\left\|\bar f^{(i)}(\varepsilon;*)\right\|_{C_{[a,b]}}}{b-a}\right)\leq$$

$$\leq C^*C\varphi(b-a)tln\frac{b-a}{t}+C^*\frac{\left\|\bar f^{(i)}(\varepsilon;*)\right\|_{C_{[a,b]}}}{b-a}t,$$

(бо $r-i-2\geq -1$). Так як C^* залежить лише від r, то множина $F_\varepsilon^{(i)}$ рівномірно неперервна на $[a,b]$ при всіх$i\epsilon\{1,2,\dots,r-1\}$ і всіх $k\geq 1$.

Нехай $k\geq 2$ і $i=r$. Тоді

$$\omega_1\big(\bar f^{(i)}(\varepsilon;*);t\big)\leq C^*Ct\left(\int_t^{\sqrt t}\frac{\varphi(u)}{u^2}du+\int_t^{(b-a)}\frac{\varphi(u)}{u^2}du\right)+C^*\frac{\left\|\bar f^{(i)}(\varepsilon;*)\right\|_{C_{[a,b]}}}{b-a}t$$

$$\leq C^*C\varphi\big(\sqrt t\big)+C^*C\varphi(b-a)\sqrt t+C^*\frac{\left\|\bar f^{(i)}(\varepsilon;*)\right\|_{C_{[a,b]}}}{b-a}t\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Отже, сім'ї$F_\varepsilon^{(j)}=\{\bar f^{(j)}(\varepsilon;*)\}_{\varepsilon\epsilon(0,\varepsilon_0]}$ рівномірно обмежені ірівностепенево (равностепенно) неперервні на $[a,b]$.

В силу теореми Арцело можна виділити (побудувати) спадаючу до нуля послідовність $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n,\dots$ і таку, що послідовність функцій

$$\bar f(\varepsilon_1;x),\bar f(\varepsilon_2;x),\dots,\bar f(\varepsilon_n;x),\dots$$

буде рівномірно збігатися на $[a,b]$ до деякої функції

$$\bar f\epsilon W^rH[k,[a,b],\varphi].$$

Покажемо, що функція $\bar f$ задовольняє теорему 1.2.

Нехай точка $x\epsilon E^{(s)}\backslash E^{(s+1)}$. Покажемо, що тоді

$$\bar f^{(j)}(x)=f^j(x)=f_j(x)\qquad(1.29)$$

Спочатку доведемо другу із рівностей (1.29), тобто рівність $f^j(x) = f_j(x)$. Позначимо $\varepsilon_{n_{k_{k_1 \dots k_j}}} = \nu_j$. Маємо:

$$
\begin{aligned}
f^j(x) &= f^j(x) - \bar{f}^{(j)}(\nu_j; x) + \bar{f}^{(j)}(\nu_j; x) \\
&= \{f^j(x) - \bar{f}^{(j)}(\nu_j; x)\} \\
&+ \{\bar{f}^{(j)}(\nu_j; x) - j!\,[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}(\nu_j; *)]\} \\
&+ j!\,\{[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}(\nu_j; *)]\} = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

Тепер за побудовою $I_1 \to 0$ при $\nu_j \to 0$;

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\bar{f}^{(j)}(\nu_j; x) - j!\,[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}(\nu_j; *)]\right| \\
&\le j! \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{j-1}} \left|\bar{f}^{(j)}(\nu_j; x)\right. \\
&\left. - \bar{f}^{(j)}(\nu_j; x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j t)\right| dt_1 \dots dt_j \\
&\le C{\nu_j}^{r-j} \omega_1(\bar{f}^{(j)}, x) \to 0.
\end{aligned}
$$

Очевидно, що $I_3 \to f_j(x)$. Друга із рівностей (1.29) доведена.

Тепер доведемо першу із рівностей (1.29). Візьмемо $\nu_j > 0$і отримаємо

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^{(j)}(x) &= f^{(j)}(x) - j!\,[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}] \\
&+ j!\,[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}] \\
&= \{f^{(j)}(x) - j!\,[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}]\} \\
&+ j!\,\{[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}] \\
&- [x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}(\nu_j; *)]\} \\
&+ \left(j!\,[x, x+\nu_j, x+2\nu_j, \dots, x+j\nu_j; \bar{f}(\nu_j; *)] - \bar{f}(\nu_j; x)\right) + \bar{f}(\nu_j; x) \\
&= I_1^* + I_2^* + I_3^* + I_4^*.
\end{aligned}
$$

При $\nu_j \to 0$ $I_2^* \to 0$ (за побудовою), $I_3^* \to 0$, $I_4^* \to f^j(x) = f_j(x)$ (за побудовою). Тому

$$
\lim_{\nu_j \to 0} \bar{f}^{(j)}(x) = \lim_{\nu_j \to 0} \left(I_1^* + f_j(x)\right) = f_j(x),
$$

що і потрібно було довести.

2. Нехай $E^{(0)}$ – довільна нескінченна і обмежена множина. Із $E^{(0)}$ виділимо скінченну і всюди щільнуна $E^{(0)}$ множину B. Занумеруємо точки множини B і перших $n(n\epsilon N)$ точок позначимо через A_n. В силу доведеного (на попередньому етапі доведення) при кожному натуральному n існує функція $\bar{f}_n \epsilon CW^r H[k,R,\varphi]$ така, що при кожному $s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}$

$$\bar{f}_n^{(s)}(x) = f_s(x), \text{якщо } x\epsilon E^{(s)} \cap A_n. \quad (1.30)$$

Точки множини A_{k+r+1} візьмемо за вузли набору τ_{k+r} і розглянемо довільну точку$t\epsilon[a,b] \equiv \left[infE^{(0)}, supE^0\right]$. Найближчу до t точку x_νнабору τ_{k+r} замінимо точкою t і отриманий набір (з різних точок) позначимо через $\check{\tau}_{k+r}$.

В силу (0.1)

$$\bar{f}_n(t) = (\left[\check{\tau}_{k+r}; \bar{f}_n\right] - \sum_{\substack{m=1 \\ (m\neq\nu)}}^{k+r+1} \bar{f}_n(x_m) \prod_{\substack{i=1 \\ (i=m, i\neq\nu)}}^{k+r+1} (x_m - x_i)^{-1}) \prod_{\substack{j=1 \\ (j\neq\nu)}}^{k+r+1} \left(t - x_j\right).$$

Для розділених різниць $\left[\check{\tau}_{k+r}; \bar{f}_n\right]$ справедлива оцінка (1.21) при будь-яких n. Враховуючи ще той факт, що в силу (1.30) $\bar{f}_n(x_m) = f_0(x_m)$, отримуємо оцінку

$$\left|\bar{f}_n(t)\right| \leq M(k,r,\sigma) = M < +\infty, \quad (1.20')$$

в якій M не залежить від n і t. Отже, сім'я$\left\{\bar{f}_n(*)\right\}_{n\geq k+r+1}$є рівномірно обмеженою на $[a,b]$. Розмірковуючи аналогічно тому, як було встановлено рівностепеневу (равностепенную) неперервність сім'ї функцій $\{\bar{f}(\varepsilon;*)\}_{\varepsilon\epsilon(0,\varepsilon_0]}$, переконаємось, що і сім'я функцій $\left\{\bar{f}_n(*)\right\}_{n\geq k+r+1}$ також рівностепенево (равностепенно) неперервна. Тому можна виділити підпослідовності послідовності

$$\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), \bar{f}_3(x), \dots, \bar{f}_n(x), \dots$$

яка буде рівномірно збіжною на $[a,b]$ до деякої функції $\bar{f}\epsilon CW^r H[k,[a,b],\varphi]$, при чому ця функція $\bar{f}$ володіє такою властивістю, що при кожному $s\epsilon\{0,1,2,\dots,r\}\bar{f}^{(s)}(x) = f_s(x)$,якщо $x\epsilon E^{(s)} \cap B$.

Покажемо тепер, що якщо точка $x_0 \epsilon E^{(s)} \backslash B$, $s \epsilon \{0,1,2,\dots,r\}$, то

$$\bar{f}^{(s)}(x_0) = f_s(x_0). \tag{1.31}$$

Для цього, враховуючи, що x_0 – гранична точка множини B, виберемо послідовність $(x_m)_m \epsilon N$точок із B таких, що при всіх $m \epsilon N x_m > x_0$ (або $\forall m \epsilon N x_m < x_0$) і $(x_m - x_0) > 2(x_{m+1} - x_0)$, тому, зокрема $x_m \to x_0$.

Тепер покажемо, що (1.31) правильно для $s = 0$, тобто що $\bar{f}(x_0) = f_0(x_0)$. Дійсно, так як за побудовою $\bar{f}(x_m) - f_0(x_m) = 0 \forall m \epsilon N$, то

$$\bar{f}(x_0) - f_0(x_0) = \frac{\bar{f}(x_0) - f_0(x_0)}{\prod_{i=m}^{m+k+r-1}(x_0 - x_i)} \prod_{i=m}^{m+k+r-1}(x_0 - x_i)$$

$$= [x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; \bar{f} - f_0] \prod_{i=m}^{m+k+r-1}(x_0 - x_i).$$

Так як $\bar{f} \epsilon C W^r H[k, [a,b], \varphi]$, то згідно теореми 1.1

$$\left|[x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; \bar{f}]\right|$$
$$\leq C \Lambda_{k,r}(x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; \varphi).$$

За умовою задана на $\mathfrak{M}_r$ функція $f \epsilon W^r \breve{H}[k, \mathfrak{M}_r; \varphi]$, а тому

$$|[x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; f_0]| \leq \Lambda_{k,r}(x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; \varphi),$$

і відповідно,

$$\left|\bar{f}(x_0) - f_0(x_0)\right| \leq$$

$$\leq (C+1)\Lambda_{k,r}(x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; \varphi) \prod_{i=m}^{m+k+r-1}(x_0 - x_i)$$

$$\leq (C+1)\Lambda_{k,r}(x_0, x_{m+k+r-1}, \dots, x_m; \varphi) \prod_{i=m}^{m+k-1}(x_0 - x_i).$$

Позначивши $t_i = x_{m+k+r-i}, i \epsilon \{1,2,\dots,r+k\}, t_0 = x_0$, маємо

$$\Lambda_{k,r}(x_0, x_{m+k+r-1}, x_{m+k+r-2}, \dots, x_m; \varphi) = \Lambda_{k,r}(, t_1, t_2, \dots, t_{k+r}; \varphi)$$

$$\le \varphi 2(t_{k+r} - t_0) \max_{q=r+1,k+r} \max_{p=0,q-r-1} \frac{\int_{\frac{1}{2}(t_q - t_p)}^{\infty} u^{p+r-q-1}\,du}{\prod_{i=0}^{p-1}(t_q - t_i) \prod_{i=q+1}^{k+r}(t_i - t_p)}$$

$$\le C\varphi\big(2(t_{k+r} - t_0)\big) \max_{q=r+1,k+r} \max_{p=0,q-r-1} \frac{(t_q - t_0)^{r+p-q}}{(t_q - t_0)^p \prod_{i=q+1}^{k+r}(t_i - t_0)}$$

$$= C\varphi\big(2(t_{k+r} - t_0)\big) \max_{q=r+1,k+r} \frac{1}{(t_q - t_0)^{q-r} \prod_{i=q+1}^{k+r}(t_i - t_0)}$$

$$= C\varphi\big(2(t_{k+r} - t_0)\big) \frac{1}{\prod_{i=r+1}^{k+r}(t_i - t_0)} = \frac{C\varphi\big(2(x_m - x_0)\big)}{\prod_{i=m}^{m+k-1}(x_i - x_0)},$$

Припустимо тепер за індукцією, що (1.30) правильно для числа $s-1\epsilon\{0,1,2,\dots,r-1\}$ і доведемо справедливість (1.30) для числа s. Так як за побудовою $\bar{f}(x_m) - f_0(x_m) = 0$ при всіх $m\epsilon N$, а за припущенням індукції $\bar{f}^{(j)}(x_0) - f_j(x_0) = 0$при всіх$j\epsilon\{0,1,2,\dots,r-1\}$, то

$$\bar{f}^{(s)}(x_0) - f_s(x_0) = \frac{\bar{f}^{(s)}(x_0) - f_s(x_0)}{\prod_{i=m}^{m+r+k-s-1}(x_0 - x_i)} \prod_{i=m}^{m+r+k-s-1}(x_i - x_0)$$

$$= \Big[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{s+1}, x_{m+r+k-s-1}, x_{m+r+k-s-2}, \dots, x_m; \bar{f} - f\Big] *$$

$$* \prod_{i=m}^{m+r+k-s-1}(x_i - x_0),$$

Тобто

$$\big|\bar{f}^{(s)}(x_0) - f_s(x_0)\big|$$

$$\le (C+1)\Lambda_{k,r}\Big(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{s+1}, x_{m+r+k-s-1}, x_{m+r+k-s-2}, \dots, x_m; \varphi\Big) *$$

$$* \prod_{i=m}^{m+r+k-s-1}(x_i - x_0)$$

$$\le (C+1)\Lambda_{k,r}\Big(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{s+1}, x_{m+r+k-s-1}, \dots, x_m; \varphi\Big) \prod_{i=m}^{m+k-1}(x_i - x_0).$$

Позначивши $t_0 = t_1 = \cdots = t_s = x_0, t_i = x_{m+r+k-i}$, де $i = \overline{s+1, k+r}$, і міркуючи так само, як і при доведенні (1.32), отримаємо, що при $m \to \infty$

$$\left|\bar{f}^{(s)}(x_0) - f_s(x_0)\right| \le C^* \varphi(2(x_m - x_0)) \to 0.$$

Співвідношення (1.31) доведено.

3. Нехай $E^{(0)}$ – нескінченна необмежена множина. При кожному натуральному N для множин

$$E^{(0)} \cap [-N, N]$$

побудуємо функції $\bar{f}_N$, які задовольнятимуть умови теореми 1.2. Сім'я $\{\bar{f}_N\}_{N \ge 1}$ буде рівномірно обмеженою і рівномірно неперервною. За теоремою Арцела із цієї сім'ї виділяємо рівномірно збіжну підпослідовність. Гранична функція $\bar{f}$ буде задовольняти умови теореми 2.

Теорема 2 доведена.

Висновки

Питання, про продовження функцій було розглянуте ще в 1934 році H. Whitney, який описав слід класу $C^r(R), r \in N$на довільній замкнутій підмножині $E \subset R$. В 1957 році P. I. Merrienрозглянув випадок, коли на E відомі не тільки значення функції, але і її похідних і також описав слід класу $C^r(E)$ але уже, зрозуміло, з допомогою розділених різниць з кратними вузлами.

В роботах В.К. Дзядика, Ю.Н. Субботіна, A. Jonsson, DeBoor, Ю.А. Брудного, П.А. Шварцмана, І.А. Шевчукабули описані сліди класів $W^r(R)$, ($f \in W^r(R)$), але лише у випадку, коли враховувались тільки значення функції f на E.

Таким чином у магістерській роботі:

1) Введено поняття розділених різниць із простими та кратними вузлами;

2) Розглянуто та систематизовано поняття продовження функційдійсної змінної в загальному випадку;

3) Розглянуто випадок опису слідів класу W^r, коли на множині E

відомі не тільки значення функції, але і її похідних;

4) Сформульовано деякі властивості розділених різниць;

5) Дано доведення відповідних теорем і у випадку, коли на E задано не тільки значення функції, але й її похідних (оскільки, у даному випадку у літературі таке доведення відсутнє);

6) Використано при доведенні зазначених теорем розділені різниці з кратними вузлами;

Результати роботи можуть бути використані математиками, які займаються питанням продовження функцій.

Список використаних джерел

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций// Тр. Моск. Мат. об-ва. – 1956. – 5. С. 483-522.

2. Берштейн С.Н. Конструктивная теория функций (1905-1930): В 2 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т.1. 580 с.

3. Берштейн С.Н. Конструктивная теория функций (1931-1953): В 2 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т.2. 626 с.

4. Бесов О.В. Продолжение функцій за пределыобласти с сохранениемдифференциально-разностныхсвойств в L_p// Матем. сб. – 1965. – 66, №1. – С. 80-96.

5. Брудный Ю. А. О локальном приближении функций многочленами/ Докл. АН СССР. – 1965. – 161, №4. – С. 746-749.

6. H. Whitney. Differentiable functions defined in closed sets/ Trans. Amer. Math. Soc., 36(1934), №2, p. 369-387.

7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. – Второе изд., доп.. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.

8. Дзядык В. К. К теорииприближенияфунций на замкнутих множествахкомплексной плоскости/ Тр. МИАН СССР. – 1975. – 225, №3. – С. 63-114.

9. Дзядык В. К. Введение в теориюравномерногоприближения функцій полиномами. – М.: Наука, 1977. – 612 с.

10. Дзядык В. К., Шевчук И. А. Продолжение функцій, являющихся на произвольноммножествепрямойследами функцій с заданнымвторым модулем непрерывности/ Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1983. – 47, №2. – С. 248-267.

11. C. De Boor. On uniform approximation by splines/ J. Approxim. Theory. – 1968. – 1. – p. 219-262.

12. Jonsson A. The trace of the Zygmund class Λ to closed sets and interpolating polinomials/ Sweden. - 1980. – n.7. – 15 p.

13. Merrien J. Prolongatenrs de functions differentiablesd'une variable rulle/ J. Math. Pures App. – 1966. – 45. – p. 291-309.

14. Шварцман П. А. О следах функций двух переменных, удовлетворяющих условию Зигмунда/ Исследования по теории функций многих вещественных переменных; Межвузовский тематический сборник. – Ярославль.: Ярославский государственный университет. – 1982. – С. 145-168.

15. Шевчук И. А. О следах функций класса H_k^{φ} на прямой// Докл. АН СССР. – 1983. – 273, №2. – С. 313-314.

16. Шевчук И.А. Конструктивное описание следов дифференцируемых функций действительной переменной. – Киев,1984. –40 с.